AP 2013

A1

<u>Vorüberlegung:</u> Der Körper besteht aus einem Zylinder und einem Kegelstumpf, der sich aus großem Kegel − kleinem Kegel berechnet werden kann.

<u>FS:</u> $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$; $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

<u>Dazu benötigen wir also</u> Höhen und Radien:

$\text{Radius}_{Zylinder} = \text{Radius}_{kleiner\ Kegel} = \frac{\overline{AB}}{2} = 4\,mm$

Bei den Höhen fehlt noch $\overline{MN}$, also mit dem "Vierstreckensatz" $\frac{\overline{FE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MN}} \Rightarrow \frac{14\,mm}{8\,mm} = \frac{\overline{MG}}{5{,}33\,mm}$

$\Rightarrow \overline{MG} = 9{,}33\,mm$, also ist $\overline{MN}$ $9{,}33_{mm} - 5{,}33_{mm} = 4\,mm$

Damit zusammen:

"Kegel GEF − Kegel GCD + Zylinder"

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (7\,mm)^2 \cdot 9{,}33\,mm - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5{,}33\,mm \cdot (4\,mm)^2$$
$$+ \pi \cdot (4\,mm)^2 \cdot 24\,mm = 1595{,}81\,mm^3$$

1.2. − Masse des Körpers mit 7,85 g pro $1\,cm^3$

$1595{,}81\,mm^3 = 1{,}59581\,cm^3 \cdot 7{,}85\,g = 12{,}53\,g$

$(10 \cdot 10 \cdot 10\,mm^3 = 1\,cm^3)$

"3 Stellen Komma verschieben"

BRUNNEN

A2 (2013)

2.1. $y = 0{,}25x^2 + bx + c$ und $S(-2|-5)$

FS "Scheitelform" (Scheitelpunkt ist ja gegeben)

$y = a(x - x_s) + y_s$ also $y = 0{,}25(x+2)^2 - 5$

"weiter auflösen" $y = 0{,}25(x^2 + 4x + 4) - 5$ binom. Formel

$y = 0{,}25x^2 + 1x + 1 - 5$ ausmultipl.

$y = 0{,}25x^2 + x - 4$

2.2. $p \cap g$ "Wir setzen Parabelterm = Gerade"

$$0{,}25x^2 + x - 4 = -0{,}5x + 1 \quad | +0{,}5x$$
$$0{,}25x^2 + 1{,}5x - 4 = 1 \quad | -1$$
$$0{,}25x^2 + 1{,}5x - 5 = 0$$

"Lösungsformel für quadr. Glg + TR":

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot (-5)}}{2 \cdot 0{,}25}$$

$x_1 = -8{,}39$ und $x_2 = 2{,}39$ ("Das sind die x-Werte der Schnittpunkte!")

Den x-Wert jeweils nun in eine der beiden (p oder g) einsetzen ergibt den y-Wert und damit den kompletten Schnittpunkt.

z.B.: $y = -0{,}5x + 1$ => $y_1 = -0{,}5 \cdot (-8{,}39) + 1 = 5{,}20$

und " " $y_2 = -0{,}5 \cdot 2{,}39 + 1 = -0{,}20$

Somit also

$$P(-8{,}39|5{,}20) \text{ und } Q(2{,}39|-0{,}20)$$

A2 (2013)

2.3. Zeichnung

2.4. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden $y = -0{,}5x + 1$ also $C_n(x \mid -0{,}5x + 1)$, aber zu B_n immer um 3 nach "links" (-3).

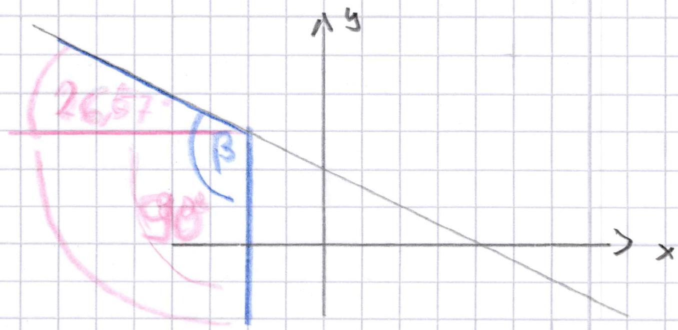
$$\left(x - 3 \mid -0{,}5(x-3) + 1\right)$$
$$\left(x - 3 \mid -0{,}5x + 2{,}5\right)$$

"$-0{,}5 \cdot x$ und $-0{,}5 \cdot (-3) = 1{,}5$ und" 1 und $1{,}5 = 2{,}5$

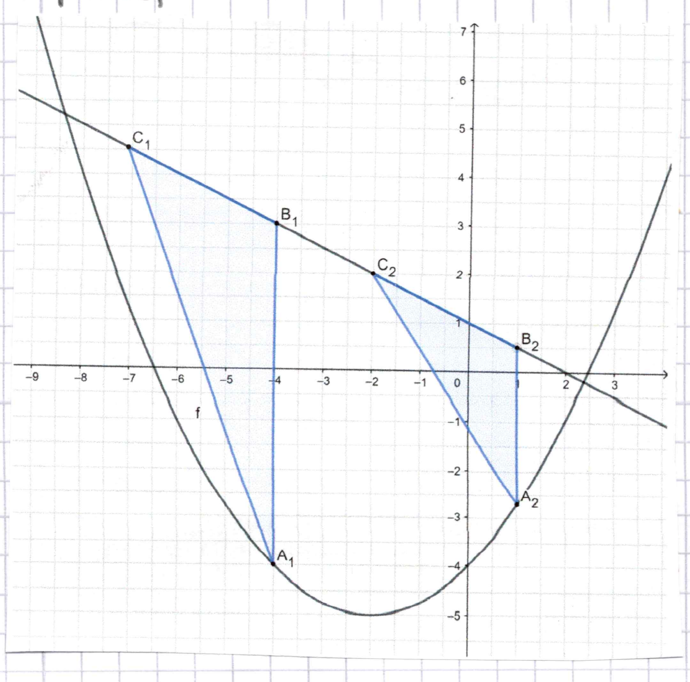
2.5. Die Winkel $C_nB_nA_n$ also bei B_n (β_n) sind immer gleich.

β_n setzt sich zusammen aus $90°$ + Steigung der Geraden. Die Steigung der Geraden ist $\tan \alpha = 0{,}5$ $\Rightarrow \alpha = 26{,}57°$ Damit zusammen $90° + 26{,}57°$ $= 116{,}57°$

Skizze:



2.3.



A3 (2013)

3.1. Von dem Dreieck MS_1S_2 sind alle 3 Seiten gegeben und ein Winkel α ist gesucht.
(Kosinussatz - und mit der Seite, die dem Winkel gegenüber liegt anfangen)

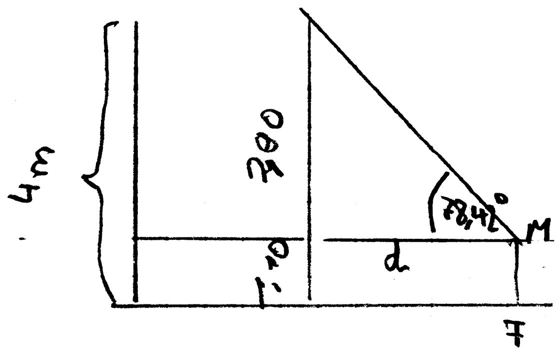
$$(8{,}85\,m)^2 = (7m)^2 + (7m)^2 - 2 \cdot 7m \cdot 7m \cdot \cos\alpha$$

$$(8{,}85\,m)^2 - (7m)^2 - (7m)^2 = -2 \cdot 7m \cdot 7m \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{(8{,}85\,m)^2 - (7m)^2 - (7m)^2}{-2 \cdot 7m \cdot 7m} = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 78{,}42^\circ \qquad *)$$

3.2. Wir rechnen mit tan 78,42° (so weit öffnet die Schranke) z.B. wie weit der LKW von M entfernt sein muss, dass es passt - Skizze



$$\tan 78{,}42^\circ = \frac{2{,}90\,m}{d}$$

$$d = 2{,}90\,m : \tan 78{,}42^\circ = 0{,}594\,m$$

Damit reicht dem LKW der Abstand von 0,59 m nicht aus.

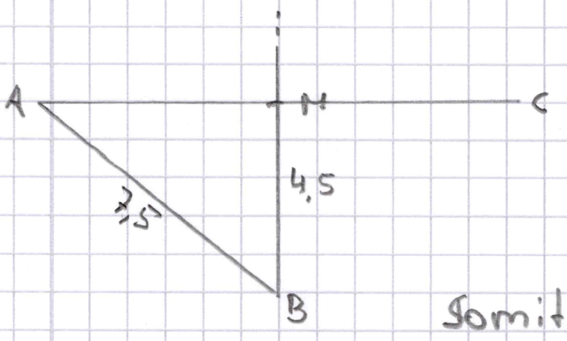
*) Länge des Bogens: FS Mittelpunktswinkel · 2 · Radius · π

$$\text{Bogen} = \frac{78{,}42^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 7m \cdot \pi = 9{,}58\,m$$

B1 (2013)

1.1. In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht zueinander und teilen sich je zur Hälfte.

Skizze:



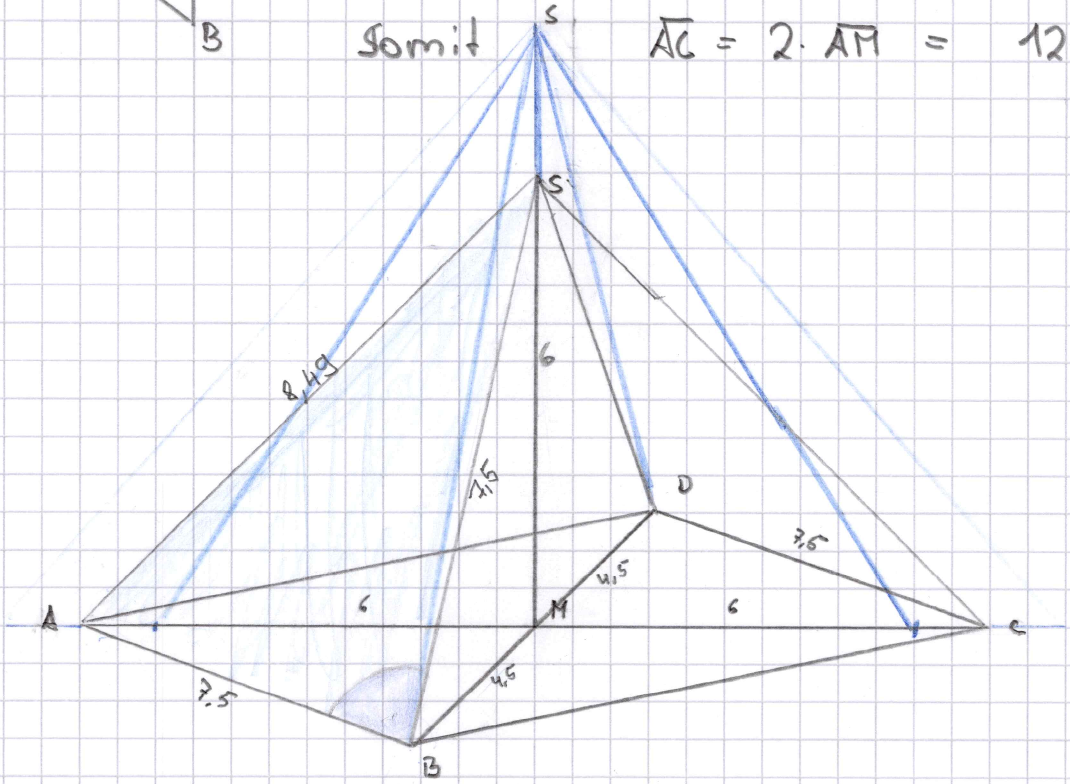
Damit rechnet man "Pythagoras"

$\overline{AM}^2 + (4{,}5\,cm)^2 = (7{,}5\,cm)^2 \Rightarrow$

$\overline{AM} = \sqrt{(7{,}5\,cm)^2 - (4{,}5\,cm)^2}$

$\overline{AM} = 6\ cm$

Somit $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM} = 12\,cm$



1.2. $\sphericalangle$ SBA (Ü: Kosinussatz. Dafür zuvor $\overline{AS}$ u. $\overline{BS}$ berechnen)

[AS] im Δ ASM : $\overline{AS}^2 = (6\,cm)^2 + (6\,cm)^2 \Rightarrow \overline{AS} = 8{,}49\ cm$

[BS] im Δ BSM : $\overline{BS}^2 = (6\,cm)^2 + (4{,}5\,cm)^2 \Rightarrow \overline{BS} = 7{,}5\ cm$

(Pythagoras im rechtwinkl. Δ)

(Jetzt Kosinussatz) $\overline{AS}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BS}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BS} \cdot \cos \sphericalangle SBA$

$(8{,}49\,cm)^2 = (7{,}5\,cm)^2 + (7{,}5\,cm)^2 - 2 \cdot 7{,}5_{cm} \cdot 7{,}5_{cm} \cdot \cos$

$\Rightarrow \cos \sphericalangle SBA = \dfrac{(8{,}49\,cm)^2 - (7{,}5\,cm)^2 - (7{,}5\,cm)^2}{-2 \cdot 7{,}5\,cm \cdot 7{,}5\,cm} \Rightarrow \sphericalangle SBA = 68{,}94°$

(FS: Fläche im allgemeinen Δ) $A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5\,cm \cdot 7{,}5\,cm \cdot \sin 68{,}94° = 26{,}25\,cm^2$

B1 (2013)

1.3. Zeichnung

1.4. FS: Volumen Pyramide $= \frac{1}{3} \cdot$ Grundfläche $\cdot$ Höhe

und Grundfläche ist eine Raute $\left(A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f\right)$

Zusammen: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{MS}$

$$V_{Pyr.} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (12cm - 2 \cdot 0{,}5xcm) \cdot (6cm + x\,cm) \cdot 9cm$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (12 - x) \cdot (6 + x) \quad cm^3$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (72 + 12x - 6x - x^2) \quad cm^3$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-x^2 + 6x + 72) \quad cm^3$$

$$= (-1{,}5x^2 + 9x + 108) \quad cm^3 \quad *)$$

1.5. Das ursprüngliche Volumen beträgt $108\ cm^3$

(am einfachsten die Volumenformel von oben mit $x = 0$)

70 % von $108\ cm^3 = 0{,}7 \cdot 108\ cm^3 = 75{,}8\ cm^3$

So ergibt sich die Gleichung

$$-1{,}5x^2 + 9x + 108 = 75{,}8 \quad | -75{,}8$$

(allg. Glg. des Volumens $= 75{,}8\ cm^3$)

$$-1{,}5x^2 + 9x + 32{,}2 = 0$$

Nun wieder mit Lösungsformel $\left(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}\right)$ und TR

$x_1 = 8{,}53$ und $x_2 = -2{,}53$ In der angegebenen Grundmenge $x \in]0;12[$ (Aufgabenstellung) liegt nur die Lösung $x = \{8{,}53\}$.

1.6.

$$\tan 60° = \frac{6 + x}{6 - 0{,}5x} \quad \left(\frac{\text{Höhe}}{\text{Halben Diagonale}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\tan 60° \cdot (6 - 0{,}5x) = 6 + x$$

$$6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}x = 6 + x \quad | -6 + 3\sqrt{3}x$$

$$6\sqrt{3} - 6 = (1 + 3\sqrt{3})x$$

$$x = 2{,}35$$

*) Maximaler Flächeninhalt von

$$V_{(x)} = -1{,}5\,x^2 + 9x + 108$$

- Entweder: Mithilfe Quadr. Erg. auf Scheitelpunktform umformen

$$-1{,}5\,x^2 + 9x + 108$$

$$= -1{,}5\,(x^2 - 6x) + 108$$ "Faktor vor x^2 ausklammern"

$$= -1{,}5\,(x^2 - 6x \underbrace{+3^2 - 3^2)}_{\text{Quadr. Erg. zufügen u. abziehen}} + 108$$

$$= -1{,}5\,\left((x-3)^2 - 9\right) + 108$$

Binom. Formel angewendet

$$= -1{,}5\,(x-3)^2 + 13{,}5 + 108$$ "-1,5 in die äußere Klammer multipl."

$$= -1{,}5\,(x-3)^2 + 121{,}5$$

→ Für $x = 3$ ist 121,5 das Maximum

- Oder: Formel für den Scheitelpunk aus der FS

$$S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right) \Rightarrow$$

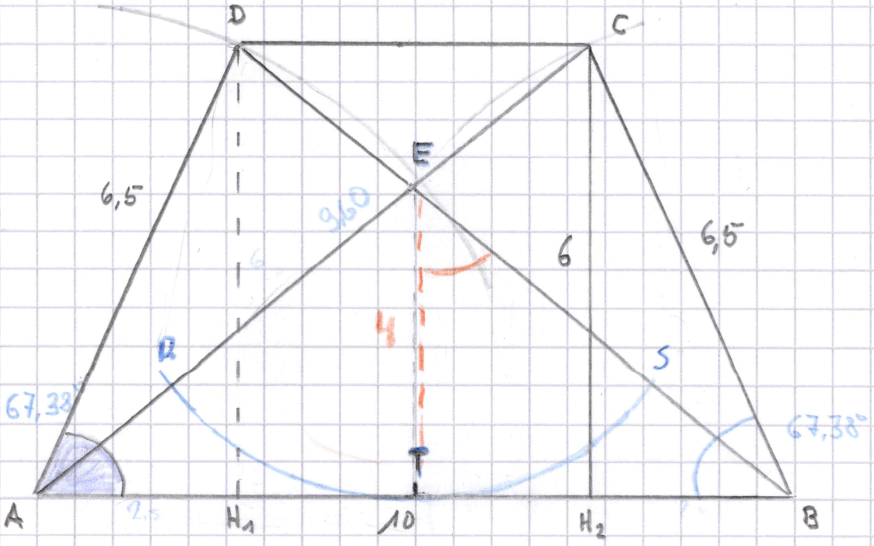
$$S\left(-\frac{9}{2\cdot(-1{,}5)} \,\middle|\, 108 - \frac{9^2}{4\cdot(-1{,}5)}\right)$$

$$S\left(3 \,\middle|\, 121{,}5\right)$$

→ Für 3 ist 121,5 das Maximum.

B2 (2013)

2.1.



2.2. Bestimme $\sphericalangle$ BAD, sowie $\overline{AC}$ und $\overline{CD}$

Durch einzeichnen der Höhe ergibt sich ein rechtwinkl. Δ bei dem zum Winkel $\sphericalangle$ BAD die Gegenkathete u. Hypotenuse geg

$$\sin \sphericalangle BAD = \frac{6\,cm}{6{,}5\,cm} \Rightarrow \sphericalangle BAD = 67{,}38°$$

Für [AC] lässt sich nun (mit dem Winkel) und den beiden Seiten $\overline{AB} = 10$ cm und $\overline{BC} = 6{,}5$ cm mit dem Kosinussatz:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 67{,}38°$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{(10\,cm)^2 + (6{,}5\,cm)^2 - 2 \cdot 10\,cm \cdot 6{,}5\,cm \cdot \cos 67{,}38°}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 9{,}60\ cm$$

Für [DC] berechnen wir zunächst $\overline{AH_1}$ und ziehen die Länge danach 2 mal von 10 cm ($= \overline{AB}$) ab.

Pythagoras $\overline{AH_1}^2 + \overline{H_1D}^2 = \overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{AH_1} = \sqrt{(6{,}5\,cm)^2 - (6\,cm)^2}$

$\overline{AH_1} = 2{,}5\,cm$

Damit ist $\overline{DC} = 10\,cm - 2 \cdot 2{,}5\,cm$

$= 5\,cm$

2.3. Zeichnung des Kreisbogens

2.4. $A_{Sektor} = \text{Mittelpunktswinkel} \cdot \pi \cdot \text{Radius}^2$

Bestimme zunächst Radius $= \overline{ET}$ malwieder mithilfe des Vierstreckensatzes $\frac{\overline{AH_2}}{\overline{H_2C}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TE}} \Rightarrow \frac{7{,}5\,cm}{6\,cm} = \frac{5\,cm}{\overline{ET}}$

$\overline{ET} = \frac{6cm \cdot 5cm}{7{,}5\,cm} = 4\,cm$. Nun lässt sich auch im rechtwinkligen ΔATE mit tan die Hälfte des Winkels bei E bestimmen. $\tan \sphericalangle AET = \frac{5\,cm}{4\,cm} \Rightarrow \sphericalangle AET = 51{,}34$

Somit ist nun $\sphericalangle AEB = 102{,}68°$. Nun können wir mit all dem zusammen:

$$A_{Sektor} = \frac{102{,}68°}{360°} \cdot \pi \cdot (4cm)^2 = 14{,}34\ cm^2$$

2.5. Der Umfang setzt sich zusammen aus Kreisbogen $\widehat{RS}$, $[ES]$, $[DE]$ und $[DR]$ (siehe Zeichnung)

$\widehat{RS} = \frac{102{,}68°}{360°} \cdot \pi \cdot 4\,cm = 7{,}17\,cm$

$\overline{ES} = 4\,cm$. Fehlen noch $[DE]$ und $[DR]$

Zu $[DE]$ betrachten wir das Halbe Dreieck DEC.

Dann gilt: $\left(\frac{\overline{DC}}{2}\right)^2 + (\text{Höhe}_{DC})^2 = \overline{DE}^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(2{,}5cm)^2 + (2cm)^2} = \overline{DE} = 3{,}20\ cm$$

$[DS]$ mithilfe d. Kosinussatzes:

$$\overline{DS}^2 = (4cm)^2 + (3{,}2\,cm)^2 - 2 \cdot 4cm \cdot 3{,}2\,cm \cdot \cos\underbrace{(180° - 102{,}68°)}_{77{,}32°}$$

$$\overline{DS} = 4{,}54\ cm$$

Umfang $u = 4{,}54\,cm + 3{,}2\,cm + 4\,cm + 7{,}17\,cm = \underline{\underline{18{,}91\,cm}}$

2.6. Zur Fläche der Figur aus 2.5 fehlt noch das

$\Delta DRE = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2cm \cdot 4\,cm \cdot \sin 102{,}68° = 6{,}24\ cm^2$

Mit dem Sektor aus 2.4. sind das $20{,}58\,cm^2$.

$A_{Trapez} = \frac{10+5}{2} \cdot 6\ cm^2 = 45\,cm^2 \qquad \frac{20{,}58\ cm^2}{45\ cm^2} = 0{,}45 < 0{,}5$