

A1 Um zu beantworten, ob der 20 l Sack in die Pflanzschale passt, berechnen wir das Volumen des Körpers, der aus einem Zylinder und einem Kegelstumpf (großer Kegel FBL minus kleiner Kegelspitze FAL) besteht:

$$\text{FS: } V_{\text{Zyl}} = \text{Radius}^2 \cdot \text{Höhe} \cdot \pi; \quad V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \text{Radius}^2 \cdot \text{Höhe} \cdot \pi$$

Nun schauen wir, was gegeben ist und was noch fehlt.

Radius für Zyl. u. gr. Kegel = 2 dm; Radius für kleinen Kegel fehlt. Höhe Zylinder = 1,4 dm; Höhe für den Kegel fehlt.

Im rechtw. $\triangle LBH$ kennen wir $\angle FBA = 35^\circ$ und $\overline{HB} = 2 \text{ dm}$

Somit ist mit $\tan 35^\circ = \frac{\overline{LH}}{2 \text{ dm}} \Leftrightarrow \overline{LH} = \tan 35^\circ \cdot 2 \text{ dm} = 1,4 \text{ dm}$

Jetzt noch Radius des kl. Zyl. mithilfe des Vierstreckensatzes

$$\frac{2 \text{ dm}}{\overline{GA}} = \frac{1,4 \text{ dm}}{(1,4 - 0,6) \text{ dm}} \Leftrightarrow \overline{GA} = \frac{2 \text{ dm} \cdot 0,8 \text{ dm}}{1,4 \text{ dm}} = 1,14 \text{ dm}$$

Alternativ auch: $\tan 35^\circ = \frac{0,8 \text{ dm}}{\overline{GA}} \Leftrightarrow \overline{GA} = \frac{0,8 \text{ dm}}{\tan 35^\circ} = 1,14 \text{ dm}$

Mit den Angaben nun zusammen:

$$\begin{aligned} V_{\text{Schale}} &= V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{gr. Kegel}} - V_{\text{kl. Kegel}} \\ &= \left(2^2 \cdot 1,4 \cdot \pi + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1,4 \cdot \pi - \frac{1}{3} \cdot 1,14^2 \cdot 0,8 \cdot \pi \right) \text{ dm}^3 \\ &= 22,37 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Der Sack mit 20 l passt in die Schale weil

$$22,37 \text{ dm}^3 \hat{=} 22,37 \text{ l entspricht und } 20 \text{ l} < 22 \text{ l.}$$

A2 (2014)

2.1. Zu [BD] betrachten wir das $\triangle BDC$. Hier sind $\overline{CD} = 8\text{cm}$ und $\overline{BC} = 7\text{cm}$, sowie der Winkel $\angle DCB = 130^\circ$ gegeben. Also zwei Seiten und ein eingeschlossener Winkel $\xrightarrow{\text{somit}}$ Kosinussatz

$$\overline{BD}^2 = (8\text{cm})^2 + (7\text{cm})^2 - 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 7\text{cm} \cdot \cos 130^\circ$$

$$\overline{BD} = 13,60\text{cm}$$

Zum Winkel $\angle CBD$ im $\triangle BDC$. 3 Seiten sind gegeben also könnten wir den Kosinussatz ($8^2 = 13,6^2 + 7^2 - 2 \cdot 13,6 \cdot 7 \cdot \cos \epsilon$) nehmen oder den Sinussatz:
 $\hookrightarrow 26,79^\circ = \epsilon$

$$\frac{8\text{cm}}{\sin \epsilon} = \frac{13,6\text{cm}}{\sin 130^\circ} \Leftrightarrow \sin \epsilon = \frac{8\text{cm} \cdot \sin 130^\circ}{13,6\text{cm}} \Rightarrow \epsilon = 26,79^\circ$$

Zum Winkel $\angle BAD = \alpha$ schauen wir ins $\triangle ABD$. Hier ist die Seite $\overline{BD} = 13,6\text{cm}$ gegeben, weiterhin $\overline{AD} = 6\text{cm}$. Mit einem Winkel mehr ließe sich der Sinussatz für α anwenden. Wie sieht es mit $\angle DBA$ aus - $\angle CBD = 26,79^\circ$ ist bekannt - ? Da $AB \parallel CD$ wäre der $\angle DBA$ aber ein Wechselwinkel zu $\angle BDC$, und der ist der 3. Winkel im $\triangle DBC$ von dem wir die beiden anderen kennen. Also:

$$\angle DBA = \angle BDC = (180^\circ - 130^\circ - 26,79^\circ) = 23,21^\circ$$

Na dann weiter mit dem Sinussatz:

$$\frac{13,6\text{cm}}{\sin \alpha} = \frac{6\text{cm}}{\sin 23,21^\circ} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{13,6\text{cm} \sin 23,21^\circ}{6\text{cm}} = 0,5329^\circ$$

2.2. [CE]: Wir betrachten das $\triangle EBC$ in dem der Winkel bei B ($= 26,79^\circ$) und von diesem aus die Hypotenuse (7cm) bekannt sind. Als mit Sinus:

$$\sin 26,79^\circ = \frac{\overline{CE}}{7\text{cm}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \sin 26,79^\circ \cdot 7\text{cm} = 3,16\text{cm}$$

(2014)

A2.3.

Wir benötigen A_{Trapez} und A_{Figur} . Bei der Figur, dem "Kreisthing" berechnen wir den Sektor mit Radius $\overline{CE} = 3,16$ und ziehen den inneren / kleineren davon ab (Radius 2,16 nach Aufgabe)

$$A_{\text{Figur}} = \left(\frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 3,16^2 \cdot \pi - \frac{130^\circ}{360^\circ} \cdot 2,16^2 \cdot \pi \right) \text{ cm}^2 = 6,04 \text{ cm}^2$$

Nun die Fläche des Trapezes. Für $A_{\text{Trapez}} = \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2}$ fehlen die Höhe und die Seite $[AB]$. Also berechnen wir die Gesamtfigur/Trapez aus den beiden Dreiecken ABD und BDC.

$$A_{\text{ABD}} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \delta \quad \text{mit } \delta = 180^\circ - 26,78^\circ - 63,29^\circ = 89,93^\circ$$

(Winkelsumme)

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 13,6 \text{ cm} \cdot \sin 89,93^\circ$$

$$= 40,80 \text{ cm}^2$$

$$+ A_{\text{BDC}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle DCB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \cdot \sin 130^\circ$$

$$= 21,45 \text{ cm}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zusammen sind das} \\ A_{\text{Trapez}} = 62,25 \text{ cm}^2 \end{array} \right\}$$

Zum Anteil des "Rings" zum Trapez:

$$\frac{6,04 \text{ cm}^2}{62,25 \text{ cm}^2} = 0,0970 \cong 9,7\%$$

B1 - 2014

$$P_1: y = a x^2 + b x + 3$$

$$1.1. \quad P(-2|-2) \in P_1 \Rightarrow -2 = a(-2)^2 + b(-2) + 3$$

$$Q(8|3) \in P_1 \Rightarrow 3 = a(8)^2 + b \cdot 8 + 3$$

Als Gleichungssystem lösen

$$(I) \quad -2 = 4a - 2b + 3$$

$$(II) \quad 3 = 64a + 8b + 3$$

Ab hier wird eine Gleichung so weit oder solange durch Äquivalenzumformungen verändert.

$$(I) \cdot 4 \quad -8 = 16a - 8b + 12$$

$$(II) \quad 3 = 64a + 8b + 3$$

damit/bis man beide

Gleichungen addieren kann,

damit ein Unbekannte weg fällt.

Jetzt (I) + (II)

$$(I) + (II): -5 = 80a + 15 \quad | -15$$

(Jetzt haben wir eine Gleichung mit einer Unbekannten, was wir lösen können)

$$\Leftrightarrow -20 = 80a \quad | :80$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = a \quad (\text{Damit ist } a \text{ bestimmt. Nun noch } b, \text{ indem}$$

Einsetzen in (I): $a = -\frac{1}{4}$ in eine der beiden Gleichungen einsetzen)

$$-2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 2b + 3 \quad \Leftrightarrow -2 = -1 - 2b + 3$$

$$\Leftrightarrow -2 = 2 - 2b \quad | +2$$

$$\Leftrightarrow -4 = -2b \quad | :(-2)$$

$$\Leftrightarrow 2 = b$$

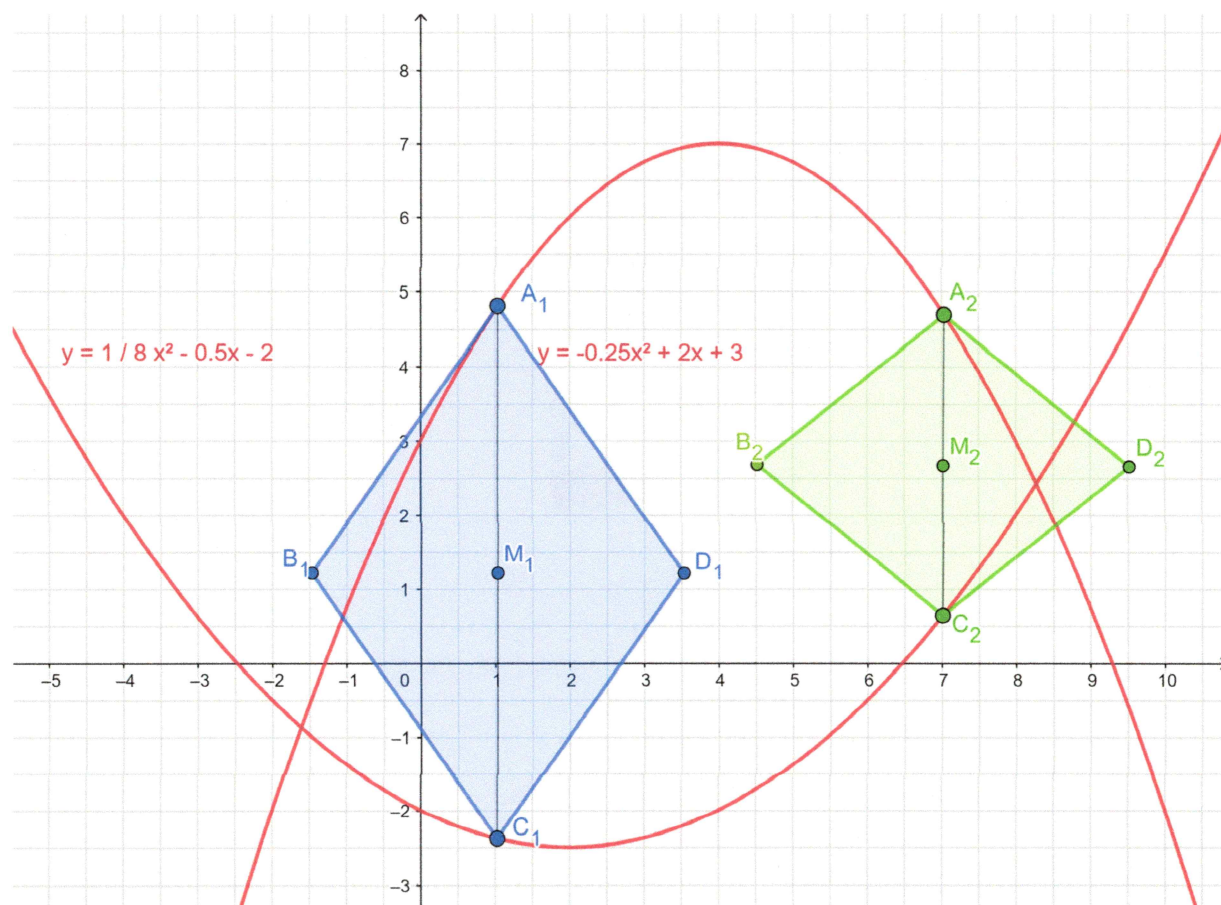
Damit sind

beide Koeffizienten bestimmt und es ergibt sich die

Parabelgleichung $P_1: y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$

(2014)

B 1.2.



1.3. Da $[A_n C_n] \parallel y$ -Achse, lässt sich die Streckenlänge einfach durch die Differenz der beiden y -Werte von A_n und C_n berechnen.

Also: $\left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3\right) - \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 2\right)$ Vorsicht! Minus vor der Klammer dreht die Vorzeichen um

$$= -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

Gleichnamige Terme zusammenrechnen

$$= -\frac{3}{8}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 5 \quad \text{oder} \quad -0,375x^2 + 2,5x + 5$$

1.4. Gesucht sind $\overline{A_n B_n} = 4$. Den Ansatz machen wir mit Pythagoras

$$\overline{A_n B_n}^2 = \left(\frac{\overline{AC_n}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BD_n}}{2}\right)^2 \Rightarrow 4^2 = \left(\frac{-0,375x^2 + 2,5x + 5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = \left(\frac{-0,375x^2 + 2,5x + 5}{2}\right)^2 + 6,25 \quad | -6,25$$

$$\Leftrightarrow 9,75 = \left(\frac{-0,375x^2 + 2,5x + 5}{2}\right)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 3,12 = \frac{-0,375x^2 + 2,5x + 5}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 6,25 = -0,375x^2 + 2,5x + 5 \quad | -6,25$$

$$\Leftrightarrow 0 = -0,375x^2 + 2,5x - 1,25$$

→ Weiter mit der Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4 \cdot (-0,375) \cdot (-1,25)}}{2 \cdot (-0,375)}$$

$$x_1 = 0,54 \quad \wedge \quad x_2 = 6,13$$

Um die Punkte $A_{3,4}$ zu bekommen müssen die beiden Werte noch

in p_1 eingesetzt werden $A_1(0,54 | 4,01)$
 $A_4(6,13 | 5,87)$

1.5. Für ein maximales $[AC_n]$ die ja ausgedrückt wird durch den Term $-0,375x^2 + 2,5x + 5$ müssen wir mithilfe einer quadrat. Ergänzung oder einfach mit der Scheitelpunktformel

$$\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) \text{ damit } \left(-\frac{2,5}{2 \cdot (-0,375)} \mid 5 - \frac{2,5^2}{4 \cdot (-0,375)}\right) =$$

$$(3,33 \mid 9,17) \quad \text{Für } x = 3,33 \text{ ist } \overline{AC_6} = 9,17 \text{ LE}$$

Sodann die Fläche dieser Raute mit $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$:

$$A_{A_6B_6C_6D_6} = \frac{1}{2} \cdot 9,17 \cdot 5 \text{ FE} = 22,93 \text{ FE}$$

1.6. Begründe, warum $\angle A_nP_nM_n < 65^\circ$.

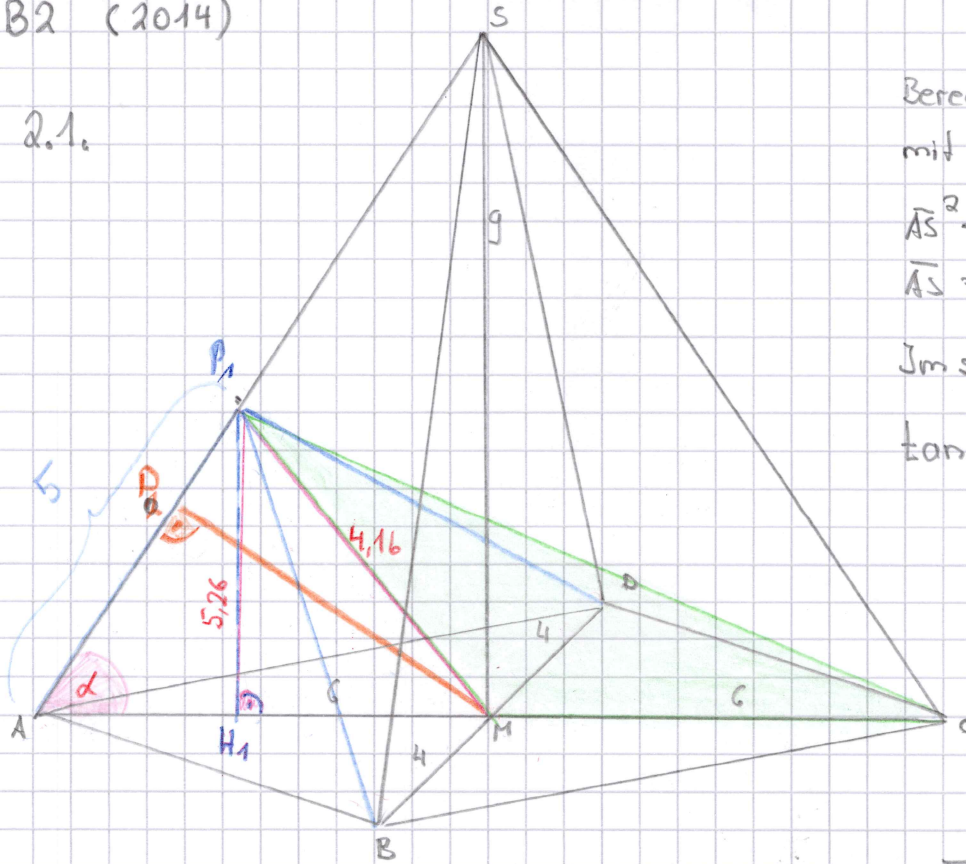
Der größte Winkel entsteht für die Raute, für die $\overline{AC_n}$ maximal groß ist und die Strecke haben wir ja schon berechnet. Damit können wir im rechth. $\triangle AMD$ den Winkel mit dem Tangens berechnen

$$\tan \delta = \frac{\overline{AC_{\max}}}{2} : \frac{\overline{BD}}{2} \quad (\text{Siehe Raute in der Skizze})$$

$$\tan \delta = \frac{4,59}{2,5} \quad \Rightarrow \delta = 61,42^\circ$$

Und damit kleiner als 65°

2.1.



Berechnen der Strecke [AS]
mit Pythagoras im $\triangle AMS$

$$\overline{AS}^2 = 9^2 + 6^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AS} = 10,82 \text{ cm}$$

Im selben Δ und Tangens

$$\tan \alpha = \frac{9}{6} \Rightarrow \alpha = 56,31^\circ$$

2.2. Aus der Aufgabenstellung haben wir $\overline{AP_1} = 5\text{cm}$ und aus 2.1. $\alpha = 56,31^\circ$, außerdem noch $\overline{AM} = 6\text{cm}$. (2 Seiten also mit eingeschlossenem Winkel $\rightarrow$ Kosinussatz (mit Seite gegenüber dem gegebenen Winkel anfangen))

$$\overline{MP_1}^2 = (6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos 56,31^\circ) (\text{cm}^2)$$

$$M_p = 5,26 \text{ cm}$$

Das Volumen der Pyramide $ABDP_1$ mit

$$V = \frac{1}{3} \cdot \Delta ABD \cdot \overline{P_1 H_1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \right) \cdot \overline{P_1 H_1}$$

Zuvor als noch $\overline{P_1 H_1}$ mit dem Sinus im $\triangle A H_1 P_1$:

$$\sin 56,31^\circ = \frac{P_1 H_1}{5 \text{ cm}} \Rightarrow \overline{P_1 H_1} = 4,16 \text{ cm}$$

Nun weiter zu oben

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4,16 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{33,28 \text{ cm}^3}}$$

(2014)

B 2.3. Gesucht ist $\frac{33,28 \text{ cm}^3}{\text{Pyr. ABCDS}}$ (Pyramide ABDE)

Dies bestimmen wir zunächst. $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$ mit der Raute $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12$ Fläche.

$$A_{\text{ABCD}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot 9 \text{ cm}^3 = 144 \text{ cm}^3$$

$$\text{Also: } \frac{33,28 \text{ cm}^3}{144 \text{ cm}^3} = 0,2311 \hat{=} 23,11\%$$

2.4. Zeichnung + A_{MCP_1} . Da in diesem Dreieck alles benötigte bekannt ist ganz einfach:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5,26 \cdot 6 \cdot \sin(180^\circ - 52,27^\circ) \quad (\leftarrow 180^\circ - \angle P_1 M A) \\ = 12,48 \text{ cm}^2$$

2.5. Da das $\triangle \text{AMP}_2$ wieder rechth. ist können wir $\overline{\text{MP}_2}$ einfach berechnen:

$$\sin 56,31^\circ = \frac{\overline{\text{MP}_2}}{6 \text{ cm}} \Leftrightarrow \overline{\text{MP}_2} = 4,99 \text{ cm}$$

Um zu begründen, dass es kein $\triangle \text{BDP}_n$ mit 18 cm^2 gibt rechnen wir einfach das $\triangle$ mit der gerade berechneten Strecke $\overline{\text{MP}_2}$ aus, die ja die kürzeste ist und schauen:

$$A_{\text{BDP}_2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4,99 \text{ cm}^2 = 19,96 \text{ cm}^2. \text{ Damit ist}$$

dieses das kleinste $\triangle$ und es gibt keines mit 18 cm^2 .

*) $\angle \text{PMC}$ ist Nebenwinkel zu $\angle \text{PMA}$ und für $\angle \text{PMA}$ gilt:

$$\sin \angle \text{PMA} = \frac{\overline{\text{PM}}}{\overline{\text{PH}}} \Rightarrow \sin \angle \text{PMA} = \frac{4,16}{5,26} \\ \Rightarrow \angle \text{PMA} = 52,27^\circ$$