Funktionen der indirekten Proportionalität

(Beispiel: „Eine Wanne hat 200 l Fassungsvermögen. Eimer gibt es in unterschiedlichen Größen. Wie viel Eimer werden benötigt, die Wanne zu füllen?“

$$\text{Wanne } (200\,l) = \text{Eimer } (10\,l) \cdot 20$$
$$\text{"} = \text{Eimer } (5\,l) \cdot 40$$
$$\text{"} = \underbrace{\text{Eimer } (20\,l)}_{x} \cdot \underbrace{10}_{y}$$

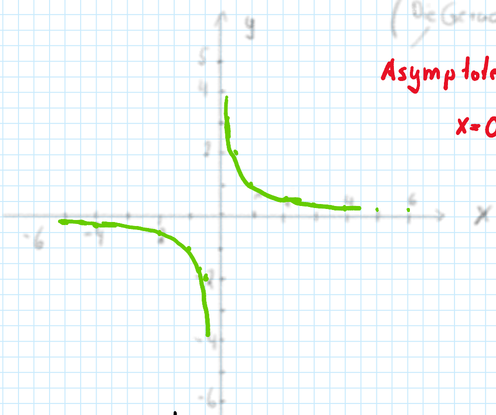
Sei nun z.B.: x … y dann ergibt sich die Gleichung:

$$200 = x \cdot y \quad | : x \qquad \text{"Um nach } y \text{ aufzulösen"}$$
$$\frac{200}{x} = y$$
)

Gleichungen der Form $y = \frac{k}{x}$ sind Funktionen der indirekten Proportionalität. Die Graphen heißen Hyperbeln.

Beispiel $y = \frac{1}{x}$ mit Wertetabelle

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	∅	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$



(Die Gerade, an die sich die Funktion annähert aber nie erreicht)

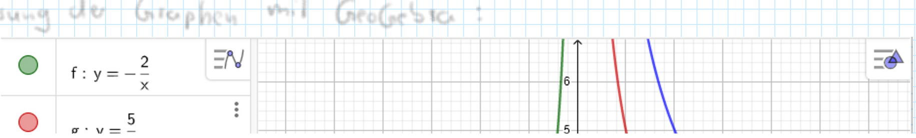
Asymptoten:

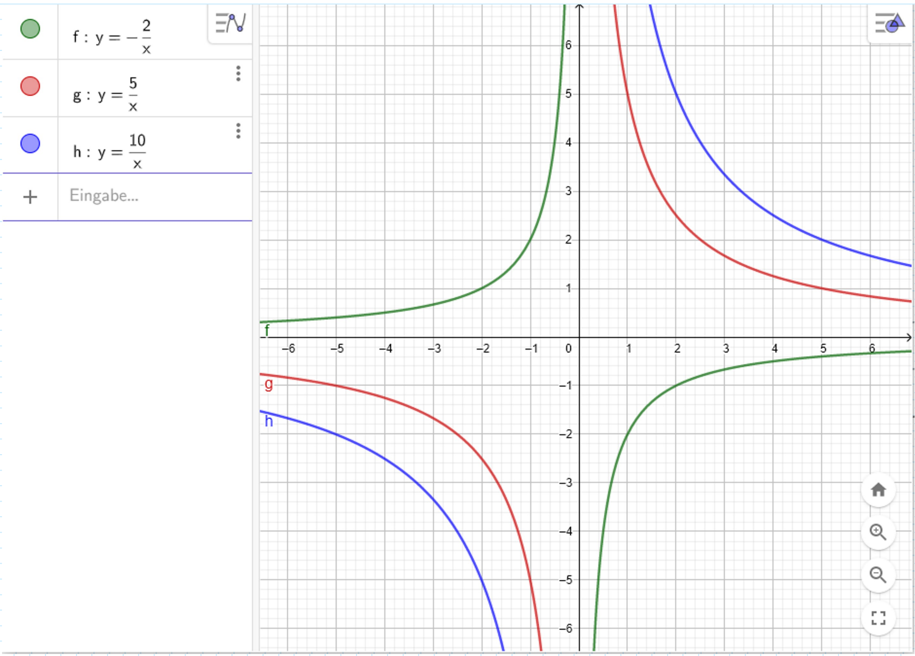
$x = 0$, $y = 0$ — (Also die x-Achse und die y-Achse)

Aufgabe: Erstelle Graph und Wertetabelle von:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
$y = -\frac{2}{x}$														
$y = \frac{5}{x}$														
$y = \frac{10}{x}$														

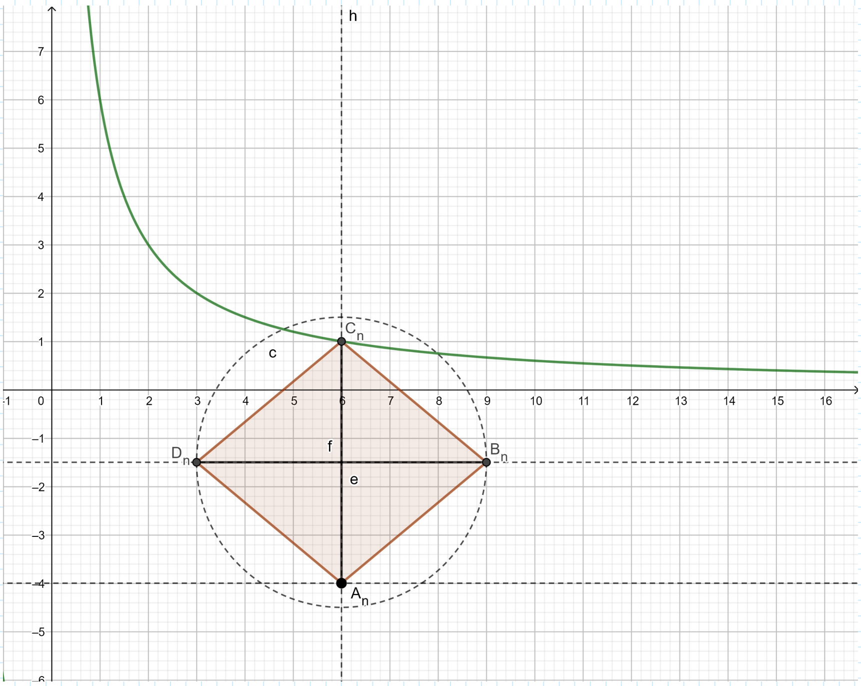
(Lösung der Graphen mit GeoGebra:





Weitere Aufgaben aus dem Buch S. 147.

①



a) Tabelle – klar ✓

b) Zeichnung ✓

c) $A_{Raute}(x)$

Für eine Raute gilt: $A = \frac{1}{2} e f$

$e = \overline{B_nD_n} = 6$ LE (Aufgabenstellung)

$f = \overline{A_nC_n}$ mit $A_n(x|-4)$ und $C_n(x|\frac{6}{x})$. Damit lässt sich der Abstand durch die Differenz der y-Werte bestimmen. Also: $\frac{6}{x} - (-4)$ LE $= (\frac{6}{x} + 4)$ LE

Zusammen ist damit:

$$A_{(x)} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{6}{x} + 4\right) \text{ FE}$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{6}{x} + 4\right) \text{ FE}$$
$$= \left(\frac{18}{x} + 12\right) \text{ FE} ✓$$

d) Raute ≙ Quadrat ⇔ $\overline{A_nC_n} = \overline{B_nD_n}$, damit wäre die Lösung gleich der, der Gleichung:

$\overline{A_nC_n} = \overline{B_nD_n}$

$\frac{6}{x} + 4 = 6$ ← (Siehe Aufgabe c))

$\frac{6}{x} = 2 \quad | \cdot x$

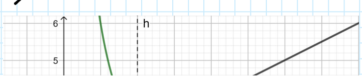
$6 = 2x \quad | :2$

$3 = x$

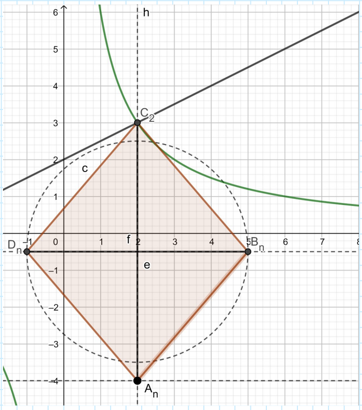
Antw.: Für $x = 3$ ist $A_nB_nC_nD_n$ ein Quadrat ✓

Damit sind die Punkte $A(3|-4)$, $C(3|\frac{6}{3})$ also $D(3|2)$, $B(6|-1{,}5)$ und $D(0|-1{,}5)$ ✓

e)



Um den Punkt $C_?$ zu bestimmen ist die Lösung der c)



Um den Punkt C_2 zu bestimmen ist die Lösung der Funktion $\frac{6}{x} \cap 0{,}5x + 2$ (geschnitten) zu finden, indem man die beiden Funktionen gleichsetz :

$$\frac{6}{x} = 0{,}5x + 2 \qquad | \cdot x$$

$$6 = 0{,}5x^2 + 2x$$ (Ein quadr. Glg – na dann :))

$$0 = 0{,}5x^2 + 2x - 6$$

$$x_{1,2} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5(-6)}}{2 \cdot 0{,}5}$$

$\underline{\underline{x_1 = 2}} \wedge x_2 = -6$

(Aber da wir nur den positiven Ast der Funktion betrachten, ist die Lösung $x_1 = 2$)

Der Punkt C_2 ist somit: $(x \mid 0{,}5x + 2)$ für $x = 2$

$(2 \mid 0{,}5 \cdot 2 + 2) = (2 \mid 3)$ ✓

(oder natürlich genauso: $(x \mid \frac{6}{x})$ für $x = 2$

$(2 \mid \frac{6}{2}) = (2 \mid 3)$)